§ 5. ЗАДАЧА О ВРАЩЕНИИ ТВЕРДОГО ТЕЛА ВОКРУГ НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКИ. СЛУЧАИ ИНТЕГРИРУЕМОСТИ

Даны приложенные к телу внешние силы $\bar{F}_1^{(e)}$, $\bar{F}_2^{(e)}$, ..., $\bar{F}_n^{(e)}$, к которым следует присоединить и силу реакции закрепленной точки (см. рис. 135). Ограничимся рассмотрением случая сил, для которых проекции главного момента $L_x^{(e)}$, $L_y^{(e)}$, $L_z^{(e)}$ на подвижные оси координат, скрепленные с телом, зависят от времени, углов Эйлера φ, ψ, θ и их первых производных по времени $\dot{\varphi}$, $\dot{\psi}$, $\dot{\theta}$ и не зависят от производных более высоких порядков от этих величин. Если тело задано, то известны его моменты инерции относительно главных осей инерции для закрепленной точки тела. Требуется определить движение тела, т. е. определить углы Эйлера в зависимости от времени. Для этого следует проинтегрировать систему шести динамических (14) и кинематических (15) уравнений Эйлера. При этом появятся шесть произвольных постоянных интегрирования, для определения которых дополнительно следует задать начальные условия, т. е. при $t=0$ задать числовые величины углов Эйлера и их первых производных. Итак, следует задать:

$$t=0;\quad \varphi=\varphi_0;\quad \psi=\psi_0;\quad \theta=\theta_0;$$
$$\dot{\varphi}=\dot{\varphi}_0;\quad \dot{\psi}=\dot{\psi}_0;\quad \dot{\theta}=\dot{\theta}_0. \tag{19}$$

Интегрирование системы нелинейных дифференциальных уравнений (14) и (15) при общих начальных условиях (19) — задача чрезвычайно трудная. Она в общем случае начальных условий не решена даже тогда, когда внешними силами являются только сила тяжести самого тела и реакция закрепленной точки. Для тяжелого твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной точки, в трех случаях была указана система первых интегралов дифференциальных уравнений, из которых неизвестные углы Эйлера в зависимости от времени определяются в квадратурах, т. е. путем вычисления интегралов. Эти частные случаи называют случаями интегрируемости уравнений Эйлера.

Случай Эйлера. Тело имеет любую форму, но закреплено в его центре масс, т. е. $L_x^{(e)}=L_y^{(e)}=L_z^{(e)}=0$. В этом случае углы Эйлера выражаются через специальные эллиптические функции.

Случай Лагранжа (случай симметричного гироскопа). Тело имеет ось симметрии, например Oz. В силу симметрии $J_x=J_y$ и эллипсоид инерции для закрепленной точки будет эллипсоидом вращения. Закрепленная точка O и центр масс C расположены на оси симметрии. В этом случае могут быть указаны шесть независимых первых интегралов, из которых углы Эйлера вычисляются в квадратурах.

Случай Ковалевской. Долгое время не удавалось указать других случаев интегрируемости, пока русский

математик С. Ковалевская, участвуя в конкурсе, объявленном Французской академией наук, не открыла еще один, получивший название случая Ковалевской. В случае Ковалевской $J_x=J_y=2J_z$. Закрепленная точка располагается на оси симметрии Oz, а центр масс находится в экваториальной плоскости эллипсоида инерции (плоскости Oxy) для неподвижной точки тела.

Во многих важных случаях, особенно симметричных тел, являющихся гироскопами, уравнения Эйлера интегрируются приближенно. Известен также ряд частных случаев начальных условий, для которых уравнения Эйлера при движении гироскопа под действием силы тяжести могут быть проинтегрированы точно.